SUR LES THEORIES DU PREMIER ORDRE CATEGORIQUES EN UN CARDINAL

BY

J. P. RESSAYRE

Une théorie du premier ordre est dite catégorique en un cardinal si tous les modèles de la théorie ayant ce cardinal sont isomorphes. Par exemple, la théorie des corps commutatifs de caractéristique 0 algébriquement clos est catégorique en tout cardinal non dénombrable.

La conjecture de Łoś (généralisée en supprimant l'hypothèse que T est dénombrable) est la suivante:

Si la théorie du premier ordre T est catégorique en un cardinal κ_0, et [cardinal de $T+\omega$] $<\kappa_0$, T est catégorique en tout cardinal κ tel que [cardinal de $T+\omega$] $<\kappa$.

M. Morley, [2] a démontré:

(I) *La conjecture est vraie si T est dénombrable.*

Par une méthode similaire à celle de [2], et en utilisant H.C.G. (=hypothèse du continu généralisée), F. Rowbottom, [6] a obtenu:

(II) *La conjecture est vraie dans les cas suivants*: *T est de cardinal régulier*, $\kappa_0>\kappa_1$, *et* $\kappa\geqq\kappa_0$, *où* κ_1 *est le plus petit cardinal de cofinalité* ω *tel que* [*cardinal de* T] $\leqq\kappa$.

Dans cet article, la conjecture de Łoś est étudiée par une méthode qui diffère en partie de celle de M. Morley et F. Rowbottom, en particulier en ce qu'elle n'emploie pas les "degrés de transcendance" (cf. [2], 2.2, pour la définition utilisée par M. Morley) comme le font ces deux auteurs.

Est obtenu ainsi, par une démonstration uniforme et sensiblement plus simple, le Théorème 5.5, qui réunit (I), (II), et une extension notable de (II), et élimine H.C.G. dans (II).

Exceptées quelques modifications, qui en éliminent H.C.G., les Propositions 3.4 et 3.5, et la démonstration qui en est exposée ici sont dues à F. Rowbottom, et l'auteur doit à l'amabilité de F. Rowbottom d'en disposer pour cet article.

L'auteur a obtenu ses résultats sans connaître ceux de F. Rowbottom. Ils n'englobaient qu'une partie de (II), mais il suffisait d'ajouter le Théorème 3.5, mentionné ci-dessus pour obtenir immédiatement 5.5.

Les résultats utilisés qui présentent un caractère général sont détachés de la démonstration du Théorème 5.5, et rappelés ou démontrés dans les §§1 à 4. Le §5 réunit ainsi les étapes principales de la démonstration, et il est possible en première lecture des paragraphes 3 et 4 de ne lire que les énoncés et Définitions 3.4, 3.6, 4.3, 4.7.

Received by the editors February 15, 1967 and, in revised form, February 7, 1968.

Le §0 contient les notations utilisées, qui sont en général celles présentées plus en détail dans [2], §§1 et 2. Un lecteur connaissant [2] peut sans doute omettre le §0, à l'exception de la définition de $T^{\#}$ et $L^{\#}$.

L'auteur tient à remercier Monsieur le Pr. Kreisel, qui a dirigé son travail, et le referee dont des critiques et suggestions à propos d'une première version de l'article ont été mises à profit.

0. **Préliminaires.**

Cardinaux. Par définition, le cardinal d'un langage est

$$\aleph_0 + [\text{cardinal de l'ensemble des symboles non logiques du langage}];$$

le cardinal d'une réalisation d'un langage est celui du domaine du la réalisation.

$|E|$ se lit: cardinal de E.

κ, λ (éventuellement avec des indices) désignent des cardinaux infinis, κ^+ le cardinal successeur de κ. $\beth_\alpha$ est défini par récurrence sur les ordinaux: $\beth_0 = \aleph_0$, $\beth_{\beta+1} = 2^{\beth_\beta}$, et si α est un ordinal limite, $\beth_\alpha = \Sigma\{\beth_\beta; \beta < \alpha\}$.

Langages(1). Les langages considérés contiennent le symbole d'égalité, que les réalisations considérées interprètent par l'identité. Soit L_1 un langage du premier ordre (les notations introduites pour L_1 sont valables pour n'importe quel langage introduit par la suite). $\psi \in L_1$, $t \in L_1$ se lisent: ψ est une formule de L_1, t est un terme de L_1. Les notations $\psi[v_0 \cdots v_n]$, $t[v_0 \cdots v_n]$ désignent une formule et un terme dont les variables libres sont parmi $v_0 \cdots v_n$. Si $r, s, \ldots, t \in L_1$ et $\psi[v_0 \cdots v_n] \in L_1$, $\psi[v_0 \cdots v_{m-1}, r, s \cdots t]$ est la formule obtenue par substitution de $r, s \cdots t$ aux occurrences libres de $v_m, v_{m+1} \cdots v_n$ dans $\psi[v_0 \cdots v_n]$. X étant une réalisation, X^n est l'ensemble des n-uplets d'éléments du domaine de X. La notation (x) désigne un n-uplet (n quelconque), dont la i-ème coordonnée est notée x_i $(1 \leqq i \leqq n)$.

Réalisations(1). Soit B une réalisation de L_1. $b \in B$ se lit: b est élément du domaine de B. Si A est une réalisation de L_1, $A \subset B$ signifie: A est une sous-réalisation de L_1. Par contre, si X est un ensemble ou une réalisation d'un langage quelconque, "X est contenu dans B" signifiera seulement que (le domaine de) X est contenu dans le domaine de B.

Si $\psi \in L_1$, et Ψ est un ensemble de formules de L_1,

$$B \models \psi, \qquad B \models \Psi$$

se lisent: B satisfait ψ, et B satisfait les formules de Ψ; si T_1 est un ensemble de formules de L_1,

$$T_1 \vdash \psi, \qquad T_1 \vdash \Psi$$

se lisent: T_1 a pour conséquence ψ, T_1 a pour conséquences les formules de Ψ.

(1) Cf. [1, p. 14], pour la définition de langage du premier ordre L_1, et de réalisation de L_1. Le lecteur peut également se référer aux définitions de [2, §1] en considèrant que "réalisation de L_1" est la traduction de "generalized relational system having the similarity type of L_1".

Si X est une réalisation ou un ensemble, A une réalisation de L_1 contenant X, $L_1(X)$ désigne un langage obtenu en ajoutant à L_1 un nouveau symbole de constante, x^*, par élément de X, x. En fait, nous omettrons de distinguer la constant $x^* \in L(X)$ et l'élément $x \in X$ qu'elle représente, écrivant par exemple, si $\psi[v_0] \in L_1$ et $x \in X$, $\psi[x]$ au lieu de $\psi[x^*]$. Fréquemment, A sera considèré tacitement comme une réalisation de $L_1(A)$, ou de $L_1(X)$. Mais quand la réalisation A sera ainsi enrichie, sa notation restera A.

On appellera "clôture de X dans A" la sous-réalisation de A dont le domaine est la clôture de X par les fonctions de A; en d'autres termes le domaine est

$$\{a \in A; \exists t[x_1 \cdots x_n] \in L_1(X) \text{ tel que } A \models a = t[x_1 \cdots x_n]\}.$$

La théorie T. T est un ensemble d'axiomes complet dans un langage du premier ordre L, et admettant un modèle infini. Il est supposé que

L ne contient que des symboles de relations,
T admet l'élimination des quantificateurs dans L.

(L'on sait comment se ramener à la première hypothèse sans restreindre la généralité des résultats. De même, si T ne vérifie pas la deuxième, on ajoute à L un symbole de relation à n arguments, R_ψ. pour chaque formule ψ à n variables libres, et à T les axiomes $R_\psi \leftrightarrow \psi$. T admet alors l'élimination des quantificateurs, et les propriétés de T qui nous intéressent sont conservées: cf. [2, 1.1 et 1.2].)

η est la collection des réalisations de L qui sont sous-réalisations d'un modèle de T. Les lettres A, B, C (éventuellement dotées d'indices) désignent toujours des membres de η, c'est pourquoi nous omettrons parfois de la préciser.

Si $A \in \eta$, $T(A)$ est la théorie de $L(A)$: $T \cup \{\text{diagramme de } A\}$. T ayant l'élimination des quantificateurs, $T(A)$ est une théorie complète.

$L(A, v_0)$ est l'ensemble des formules $\psi[v_0] \in L(A)$, consistantes avec $T(A)$.

La notation $A\{b\}$ désigne une extension de A par un seul point, qui est compatible avec T; précisément $A\{b\}$ doit avoir les propriétés suivantes:

$A\{b\} \in \eta$,

$A \subset A\{b\}$,

le domaine de $A\{b\}$ est constitué du point b et du domaine de A.

Eventuellement, $b \in A$, et $A\{b\}$ se réduit à A.

Soient $\psi[v_0] \in L(A, v_0)$, $\Psi \subseteq L(A, v_0)$, et $a \in A$;

$$a \text{ réalise } \psi[v_0] \text{ dans } A \Leftrightarrow T(A) \vdash \psi[a];$$

$$A \text{ réalise } \psi[v_0] \Leftrightarrow \text{il existe un élément de } A \text{ qui réalise } \psi[v_0] \text{ dans } A.$$

De même a réalise Ψ dans A si a réalise toute formule de Ψ dans A; et A réalise Ψ s'il existe un point de A qui réalise Ψ dans A.

PROPOSITION 0.1. (i) *Etant donnée une réalisation $A\{b\}$,*

$$p = \{\psi[v_0]; \psi[v_0] \in L(A) \textit{ et } b \textit{ réalise } \psi[v_0] \textit{ dans } A\{b\}\}$$

est un sous-ensemble de $L(A, v_0)$ consistant avec $T(A)$ et maximal.

En effet si $\psi[v_0] \in L(A)$, ou bien b réalise $\psi[v_0]$ dans $A\{b\}$, ou bien b réalise $\neg\psi[v_0]$, par complétude de $T(A)$.

(ii) *Réciproquement, si $S(A)$ est l'ensemble des sous-ensembles de $L(A, v_0)$ consistants avec $T(A)$ et maximaux, $p \in S(A)$ implique: il existe une extension $A\{b\}$ de A, telle que p soit l'ensemble défini en* (i).

(iii) *Dans $A\{b\}$ et $A\{c\}$ respectivement, b et c réalisent le même point de $S(A)$, p, si et seulement si l'application f telle que*

$$f(b) = c \quad et \quad f \restriction A = 1_A$$

est un isomorphisme de $A\{b\}$ sur $A\{c\}$.

En résumé de 0.1, on peut dire que les points de $S(A)$ caractèrisent les classes d'isomorphisme d'extensions de A par un point.

Soit $A \in \eta$. Comme $T(A)$ est complet, si $\psi[v_1 \cdots v_n] \in L(A)$ et

$$T(A), \exists v_1 \cdots \exists v_n \psi[v_1 \cdots v_n]$$

sont consistants,

$$T(A) \vdash \exists v_1 \cdots \exists v_n \psi[v_1 \cdots v_n].$$

D'où: si $\psi[v_1 \cdots v_n]$, $\phi[v_1 \cdots v_n] \in L(A)$ et sont séparément consistants avec $T(A)$,

$$T(A), \psi[v_1 \cdots v_n], \phi[v_1' \cdots v_n']$$

sont consistants ($v_1' \cdots v_n'$ étant des variables différentes de $v_1 \cdots v_n$).

Par le theorème de finitude, un résultat analogue s'obtient en remplaçant les formules $\psi[v_1 \cdots v_n]$, $\phi[v_1 \cdots v_n]$ par des ensembles de formules de $L(A)$, et les résultats (i) et (ii) ci-dessous s'en déduisent facilement.

PROPOSITION 0.2. (i) *Soient $A, B \in \eta$, $A \subset B$, $\Psi \subset L(A, v_0)$. Si Ψ est consistant avec $T(A)$, Ψ l'est avec $T(B)$. En particulier, on obtient*

$$S(A) = \{p \cap L(A, v_0); p \in S(B)\}.$$

(ii) *Si $A \in \eta$, il existe $B \in \eta$ tel que $A \subset B$ et B réalise chaque point de $S(A)$.*
(0.2 (ii) est démontré en [2, Lemma 2.1.])

(iii) *Soit $A \in \eta$.*

A est un modèle de $T \Leftrightarrow$ toute formule $\psi[v_0] \in L(A, v_0)$ est réalisée dans A.

DÉMONSTRATION. Si A est un modèle de T et $\psi[v_0] \in L(A, v_0)$,

$$A \models T(A), \quad \text{et } T(A) \vdash \exists v_0 \psi[v_0]$$

donc $A \models \exists v_0 \psi[v_0]$, et $\psi[v_0]$ est réalisée dans A.

Réciproquement, si toute formule de $L(A, v_0)$ est réalisée dans A, on peut définir des fonctions sur tout le domaine de A,

$$f_\psi[v_1 \cdots v_n] \qquad (\psi[v_0, v_1 \cdots v_n] \in L)$$

vérifiant: si $\psi[v_0, a_1 \cdots a_n] \in L(A, v_0)$, $f_\psi[a_1 \cdots a_n]$ est un élément $a \in A$ tel que a réalise $\psi[v_0, a_1 \cdots a_n]$ dans A.

En d'autres termes, dans n'importe quel modèle de T étendant A (et donc satisfaisant $T(A)$), les f_ψ sont des fonctions de Skolem de domaine A, et à valeur dans A, et il est bien connu que ceci entraîne $A \models T$.

(iv) *Si* $\{A_\alpha; \alpha<\gamma\}$ *est une chaîne croissante de membres de* η (*c'est à dire* $\alpha<\beta<\gamma \Rightarrow A_\alpha \subseteq A_\beta$),

$$A_\gamma = \bigcup \{A_\alpha; \alpha < \gamma\}$$

est encore un élément de η. (En effet, le diagramme de A_γ est la réunion des diagrammes des A_α, qui est finiment consistante avec T.)

Forme de Skolem de T. Soient $\{L^n; n \in \omega\}$ une suite de langages du premier ordre, $\{T^n; n \in \omega\}$ une suite de théories définies par récurrence: $L^0=L$, $T^0=T$; si L^n et T^n sont définis, L^{n+1} est obtenu en ajoutant à L^n un symbole de fonction f_ϕ, à p arguments, par formule $\phi \in L^n$ de la forme $\exists y\psi[v_1 \cdots v_p y]$. T^{n+1} est obtenu en ajoutant à T^n, pour chaque formule ϕ de la forme ci-dessus, la formule

$$\forall v_1 \cdots \forall v_p(\exists y\psi[v_1 \cdots v_p y] \to \psi[v_1 \cdots v_p f_\phi[v_1 \cdots v_p]]).$$

Nous considèrerons par la suite

$$T^\# = \bigcup \{T^n; n \in \omega\}, \qquad L^\# = \bigcup \{L^n; n \in \omega\}.$$

Il est bien connu que, modulo T^{n+1}, toute formule de L^n équivaut à une formule universelle de L^{n+1}, d'où la propriété ci-dessous:

soit $B^\#$ un modèle de $T^\#$. Pour tout ensemble X contenu dans $B^\#$, la clôture de X dans $B^\#$ est un sous-modèle élémentaire de $B^\#$.

1. **Modèles saturés**(2).

DÉFINITION. $B \in \eta$ *est dit* λ*-saturé si*

(i) *pour tout* A *tel que* $A \subset B$ *et* $|A| < \lambda$, *chaque point de* $S(A)$ *est réalisé dans* B.

Noter que si B satisfait (i), B est nécessairement un modèle de T, d'après 0.2 (iii).

B est dit saturé si B est $|B|$*-saturé.*

THÉORÈMES 1.1. (a) *Deux modèles saturés de T, de même cardinal, sont isomorphes.*

(b) *Si B est un modèle saturé, B est un modèle universel de T* (*c'est à dire*: $A \in \eta$ *et* $|A| \leqq |B|$ *impliquent l'existence d'un isomorphisme de A dans B*).

Ces théorèmes sont bien connus, et nous nous contenterons de rappeler l'idée maîtresse de leur démonstration: la notion de modèle saturé apparaît comme une généralisation de celle d'ordre dense, du moins lorsqu'on reformule (i) en utilisant

(2) 1.1 est dû principalement à Jónsson et à Fraïssé. 1.2, sous des hypothèses plus générales, est dû à Morley et Vaught. 1.1, 1.2 sont démontrés dans [4], avec une terminologie différente qui est expliquée dans [2, footnote 20].

0.1([3]). En particulier les Théorèmes 1.1 sont des généralisations directes des raisonnements de Cantor sur les ordres denses: deux ordres denses dénombrables sans premier ni dernier élement sont isomorphes; tout ordre dénombrable peut être plongé dans un ordre dense dénombrable.

DÉFINITION. T est dite stable en le cardinal λ si pour tout $A \in \eta$

$$|A| \leqq \lambda \text{ entraîne } |S(A)| \leqq \lambda.$$

PROPOSITION I.2. (a) *Si T est stable en tout cardinal λ tel que $|L| \leqq \lambda < \kappa_0$ et κ est la cofinalité de κ_0, T admet un modèle κ-saturè de cardinal κ_0.*

(b) *Si T est stable en κ_0, κ est un cardinal régulier, et $\kappa \leqq \kappa_0$, T admet un modèle κ-saturé de cardinal κ_0. (En particulier, si κ_0 est régulier T admet un modèle saturé de cardinal κ_0.)*

DÉMONSTRATION DE (a). Construire une chaîne $\{A_\alpha; \alpha \leqq \kappa_0\}$ telle que $|A_0| < \kappa_0$, et $\alpha = \text{ordinal limite} \Rightarrow A_\alpha = \bigcup \{A_\beta; \beta < \alpha\}$;

$\alpha = \beta + 1 \Rightarrow |A_{\beta+1}| < \kappa_0$ et chaque point de $S(A_\beta)$ est réalisé dans $A_{\beta+1}$. (0.2 affirme l'existence de $A_{\beta+1}$, réalisant chaque point de $S(A_\beta)$; et puisque $|S(A_\beta)| \leqq |A_\beta| + |L|$, il est possible de satisfaire en plus $|A_{\beta+1}| < \kappa_0$.)

A_{κ_0} est κ-saturé: si

$$A \subset A_{\kappa_0}, \quad \text{et} \quad |A| < \kappa,$$

comme κ (=cofinalité de κ_0) est régulier, il existe $\alpha < \kappa_0$ tel que $A \subset A_\alpha$. Et $A_{\alpha+1}$, donc A_{κ_0}, réalisent tous les points de $S(A_\alpha)$, donc tous ceux de $S(A)$.

Pour démontrer (b), construire une chaîne semblable, $\{A_\alpha; \alpha \leqq \kappa\}$ vérifiant

$$|A_\alpha| = \kappa_0 \quad \text{pour tout } \alpha < \kappa$$

au lieu de

$$|A_\alpha| < \kappa_0 \quad \text{pour tout } \alpha < \kappa_0.$$

2. **Modèles d'Ehrenfeucht-Mostowski([4]).** Soient L' un langage du premier ordre, $<$ un symbole de relation binaire n'appartenant pas à L'. M_1, M_2 étant des réalisations de L', et f une bijection de domaine X_1 contenu dans M_1 et d'image contenue dans M_2, f est dit *élémentaire vis à vis de M_1, M_2*, si pour $\psi[v_1 \cdots v_n] \in L'$ et $x_1, \ldots, x_n \in X_1$

$$M_1 \vDash \psi[x_1 \cdots x_n] \Leftrightarrow M_2 \vDash \psi[fx_1 \cdots fx_n].$$

DÉFINITION. *Soient M, réalisation d'un langage L', X, sous-ensembles du domaine de M, τ un type d'ordre. X est τ-indiscernable dans M si X peut être muni*

([3]) B est saturé $\Leftrightarrow$ si $|A| < |B|$ et f est un isomorphisme de A dans B, pour toute réalisation $A\{b\} \in \eta$, il existe une extension de f à $A\{b\}$.

([4]) Les Théorèmes 2.1 et 2.3 sont dûs à Ehrenfeucht et Mostowski. Divers auteurs ont contribué aux Théorèmes 2.7 et 2.9, cf. [2, footnotes 16, 17, 18]. Tous ces théorèmes sont exposés dans [2, §3].

d'un ordre de type τ, noté $<$, tel que: tout isomorphisme pour $<$ d'une partie de X dans une partie de X est élémentaire vis à vis de M et M.

Quand nous considèrerons X τ-indiscernable dans une réalisation M, il sera sous-entendu qu'une interprètation de $<$ dans X est fixée, pour laquelle les propriétés ci-dessus sont vérifiées.

PROPOSITION 2.1. *Soit T' une théorie de L', ayant un modèle infini. Pour tout type d'ordre τ, il existe un modèle de T' contenant un ensemble τ-indiscernable.*

PROPOSITION 2.2. *Soit M, modèle de T' contenant un sous-ensemble τ-indiscernable X, τ étant infini. On peut associer à tout ensemble Z, ordonné par $<$, un modèle de T' noté $B(Z)$ contenant Z, de façon que*

(i) *si Z' est ordonné par $<$, $Y \subset Z$ et $Y' \subset Z'$, tout isomorphisme pour $<$ de Y sur Y' est élémentaire vis à vis de $B(Z)$ et $B(Z')$.*

(ii) *L'application 1_X est élémentaire vis à vis de $B(X)$ et M.*

2.2. Généralise 2.1 en ce sens que la propriété (i) restreinte au cas $Z = Z'$ exprime que Z est τ_1-indiscernable dans $B(Z)$, τ_1 étant le type de Z pour $<$.

DÉMONSTRATION. Soit E l'ensemble de formules de L' ainsi défini (n entier $\geqq 0$)

$$\psi[v_1 \cdots v_n] \in E \Leftrightarrow \psi[v_1 \cdots v_n] \in L', \text{ et il existe } x_1 \cdots x_n \in X \text{ tels que } x_1 < \cdots < x_n \text{ et } M \models \psi[x_1 \cdots x_n].$$

Si $x_1 \cdots x_n \in X$, $x'_1 \cdots x'_n \in X$, $x_1 < \cdots < x_n$ et $x'_1 < \cdots < x'_n$, l'application: $x_i \to x'_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$ est un isomorphisme pour $<$, donc élémentaire vis à vis de M et M. Il en résulte que, si $\psi[v_1 \cdots v_n] \in L'$,

$$\psi[v_1 \cdots v_n] \in E \Leftrightarrow \neg\psi[v_1 \cdots v_n] \notin E.$$

Par conséquent, pour tout ensemble Z ordonné par $<$,

$$E(Z) = \{\psi[z_1 \cdots z_n]; \psi[v_1 \cdots v_n] \in E, z_1, \ldots, z_n \in Z, \text{ et } z_1 < \cdots < z_n\}$$

est complet et consistant dans $L'(Z)$. Alors, par des méthodes standard, il est possible de choisir pour tout ensemble Z ordonné par $<$ un modèle noté $B(Z)$, contenant Z et satisfaisant $E(Z)$.

De par la définition de $E(Z)$, il est facile de vérifier (i) et (ii).

DÉFINITION. Un modèle $A^\#$ de $T^\#$ est un modèle d'Ehrenfeucht-Mostowski (nous écrirons: modèle E.-M.) de type τ de $T^\#$ s'il est engendré par un ensemble X qui est τ-indiscernable dans $A^\#$. ($A^\#$ est engendré par $X \Leftrightarrow A^\#$ contient X, et la clôture de X dans $A^\#$ est $A^\#$.)

PROPOSITION 2.3. *Pour tout type d'ordre τ, $T^\#$ admet un modèle E.-M. de type τ.*

PROPOSITION 2.4. *Soient $M^\#$, modèle de $T^\#$, contenant un ensemble τ-indiscernable X, τ étant un type infini.*

A tout ensemble Z ordonné par $<$ on peut associer un modèle de $T^\#$ engendré par Z, noté $M(Z)^\#$, de façon que

(i) *si* $Y \subset Z$, $M(Y)^{\#} \subset M(Z)^{\#}$,

(ii) *si* Z' *est un ensemble ordonné par* $<$, $Y \subset Z$ *et* $Y' \subset Z'$, *tout isomorphisme pour* $<$ *de* Y *sur* Y' *admet une extension unique, qui est un isomorphisme de* $M(Y)^{\#}$ *sur* $M(Y')^{\#}$.

(iii) *L'application* 1_X *s'étend en un isomorphisme de* $M(X)^{\#}$ *dans* $M^{\#}$.

2.4 est la généralisation de 2.3 correspondant à celle de 2.1 par 2.2: (ii) restreint au cas $Z=Z'$ entraîne que $M(Z)^{\#}$ est un modèle E.-M. de type τ_1 de $T^{\#}$, τ_1 étant le type de Z pour $<$.

Démonstration. 2.2, appliqué en prenant

$$T^{\#} \text{ au lieu de } T' \text{ pour théorie,}$$
$$M^{\#} \text{ et } X \text{ au lieu de } M \text{ et } X,$$

associe à tout ensemble Z ordonné par $<$ un modèle de $T^{\#}$ qui sera noté $B(Z)^{\#}$ au lieu de $B(Z)$.

Le modèle $M(Z)^{\#}$ est, par définition, la clôture de Z dans $B(Z)^{\#}$.

Soient Z, Z' ensembles ordonnés par $<$, $Y \subset Z$, $Y' \subset Z'$, et f: $Y \to Y'$, élémentaire vis à vis de $B(Z)^{\#}$ et $B(Z')^{\#}$.

Remarque 1. f est également élémentaire vis à vis de $M(Z)^{\#}$ et $M(Z')^{\#}$ car ce sont des sous-modèles élémentaires de $B(Z)^{\#}$ et $B(Z')^{\#}$.

Remarque 2. f admet une extension unique, $f^{\#}$, en un isomorphisme de la clôture de Y dans $M(Z)^{\#}$ sur la clôture de Y' dans $M(Z')^{\#}$: $f^{\#}$ est défini par les conditions

$$M(Z)^{\#} \models t[y_1 \cdots y_n] = a \Rightarrow M(Z')^{\#} \models t[fy_1 \cdots fy_n] = f^{\#}(a)$$

pour tout terme $t[y_1 \cdots y_n] \in L^{\#}(Y)$ et tout $a \in M(Z)^{\#}$. De ces remarques, et des propriétés (2.2) de la correspondance $Z \to B(Z)^{\#}$ résultent (iii), et

(i)′ l'application identité de Y dans Z admet une extension unique en un isomorphisme de $M(Y)^{\#}$ sur la clôture de Y dans $M(Z)^{\#}$;

(ii)′ si f est un isomorphisme pour $<$ de Y sur Y', f admet une extension unique en un isomorphisme de la clôture de Y dans $M(Z)^{\#}$ sur celle de Y' dans $M(Z')^{\#}$.

La propriété (i) est un renforcement de (i)′ requis seulement pour la commodité des notations. Le lecteur se convaincra aisément qu'elle peut être vérifiée par un choix adéquat de $B(Z)^{\#}$, moyennant des restrictions insignifiantes sur la classe d'ensembles à laquelle doit appartenir le domaine de Z. (i) étant vérifiée, (ii)′ se traduit par (ii).

Si $B^{\#}$ est une réalisation de $L^{\#}$, $B^{\#} \upharpoonright L$ sera noté B. Nous n'utiliserons par la suite qu'une conséquence de 2.4, à savoir:

Proposition 2.5. *Soit* $M^{\#}$ *un modèle de* $T^{\#}$ *contenant un ensemble* X_0 τ*-indiscernable dans* $M^{\#}$.

A tout ensemble Z *ordonné par* $<$ *est associé un modèle de* T *de cardinal* $\leqq |L| + |Z|$, $M(Z)$, *contenant* Z, *de façon que*

(i) *si* $Y \subset Z$, $M(Y) \subset M(Z)$,

(ii) *si* Z' *est ordonné par* $<$, *et* Z *est finîment plongeable dans* Z' *pour* $<$, $M(Z)$ *est finîment plongeable dans* $M(Z')$.

(iii) *L'application* 1_{X_0} *s'étend en isomorphisme de* $M(X_0)$ *dans* M. (Finîment plongeable dans ... $\Leftrightarrow$ toute partie finie s'envoie par un isomorphisme dans ....)

Nous considèrons un ensemble ordonné X, de type τ, fixé, et les notations ci-dessous concernant X et $M(X)^{\#}$ sont supposées valables jusqu'à la fin du paragraphe. La Proposition 2.6 se borne à expliciter d'une façon particulière le fait que $M(X)^{\#}$ est un E.-M. de type τ de $T^{\#}$.

2.6. (i) *Nous pouvons nous donner une application du domaine de* $M(X)^{\#}$ *dans l'ensemble des termes clos de* $L^{\#}(X)$, *avec les propriétés et notations suivantes*:

si $a \in M(X)^{\#}$, $\underline{a}$ *désigne l'image de* a *par cette application, et pour tout* $x \in X$, $\underline{x}$ *est* x;

$M(X)^{\#} \models a = \underline{a}$;

si $A \subseteq M(X)^{\#}$, $\underline{A} = \{\underline{a};\, a \in A\}$;

si $a_1 \cdots a_n \in M(X)^{\#}$, $\psi[v_1 \cdots v_n] \in L^{\#}$,

$$M(X)^{\#} \models \psi[a \cdots a_n] \leftrightarrow \psi[\underline{a}_1 \cdots \underline{a}_n].$$

NOTATIONS. Z étant un ensemble quelconque, soient $t[v_1 \cdots v_k] \in L^{\#}(Z)$ et $(z) \in Z^n$. La notation $t(z)$ sera employée en sous-entendant que $k \leqq n$, pour désigner $t[z_1 \cdots z_k]$.

Soient $Y \subset X$, et $t^i(x^i)$, $u^i(z^i)$ $(1 \leqq i \leqq n)$ des termes de $L^{\#}(X)$.

$(t^1(x^1) \cdots t^n(x^n)) \approx_Y (u^1(z^1) \cdots u^n(z^n))$

$\Leftrightarrow t^i = u^i \quad (1 \leqq i \leqq n)$ et $((x^1) \cdots (x^n))$ et $((z^1) \cdots (z^n))$ sont isomorphes sur Y pour la relation $<$

(c'est à dire: (x^i) et (z^i) ont même longueur 1_i, et la correspondance

$$\begin{array}{ll} x^i_j \to z^i_j & (1 \leqq i \leqq n,\, 1 \leqq j \leqq 1_i) \\ y \to y & (\text{pour tout } y \in Y) \end{array}$$

est un isomorphisme pour $<$).

Si Y est vide, $\approx_Y$ est noté $\approx$.

2.6. (ii) *L'indiscernabilité de* X *peut s'énoncer ainsi* (Y *quelconque*): *si* $a_1, \ldots, a_n \in M(X)^{\#}$, $t^1(x^1), \ldots, t^n(x^n) \in L^{\#}(X)$ *et* $\psi[v_1 \cdots v_n] \in L^{\#}(M(Y)^{\#})$, *la valeur de* $\psi[t^1(x^1) \cdots t^n(x^n)]$ *dans* $M(X)^{\#}$ *ne dépend que de la classe de* $[t^1(x^1) \cdots t^n(x^n)]$ *pour* $\approx_Y$. *Par conséquent, la valeur de* $\psi[a_1 \cdots a_n]$ *dans* $M(X)^{\#}$ *ne dépend que de la classe de* $(\underline{a}_1 \cdots \underline{a}_n)$ *pour* $\approx_Y$.

DÉMONSTRATION. Dire que $(t^1 \cdots t^n)$ et $(u^1 \cdots u^n)$ sont dans la même classe pour $\approx_Y$ revient à dire qu'il existe un isomorphisme pour $<$, f, d'une partie Y' telle que $Y \subseteq Y' \subseteq X$, et que

t^i, $u^i \in L^{\#}(Y')$ $(1 \leqq i \leqq n)$,

$M(X)^{\#} \models a_i = t^i \Rightarrow M(X)^{\#} \models f^{\#}(a_i) = u^i$, $f^{\#}$ étant l'extension de f définie en 2.4, Remarque 2, qui est élémentaire, si f l'est. Les deux sens de la proposition s'en déduisent aisément.

PROPOSITION 2.7. (a) *Si τ est un ordinal et $Y \subseteq X$, le nombre de classes d'équivalences pour la relation $\approx_Y$ est au plus $|Y|+|L|$.*

Une conséquence immédiate de (a) (moyennant 2.6(ii)) est: le nombre de points de $S(M(Y))$ réalisés dans $M(X)$ est au plus $|Y|+|L|$.

(b) *Si τ est un cardinal κ_0, et $M(X)$ est un modèle universel de T, T est stable en tout λ tel que $|L| \leqq \lambda < \kappa_0$.*

(a) résulte aisément de la remarque suivante: Y étant un bon-ordre pour $<$, il n'y a que $|Y|+\omega$ manières non isomorphes d'intercaler un ensemble fini entre les éléments de Y.

DÉMONSTRATION DE (b). Supposons que $A \in \eta$, $|A| < \kappa_0$, et $|A|+|L| < |S(A)|$. Il existe $B \in \eta$ tel que $A \subseteq B$, $|B| \leqq \kappa_0$ et B réalise $(|L|+|A|)^+$ points de $S(A)$ (cf. 0.2(ii)).

Bien que $|B| \leqq \kappa_0 = |M(X)|$, B ne peut pas être plongé dans $M(X)$, car A serait plongé dans $M(X)$ et $M(X)$ réaliserait au plus $|A|+|L|$ points de $S(A)$, d'après (a). $M(X)$ n'est donc pas universel, et (b) est ainsi démontré sous forme converse.

DÉFINITION. Soient A, B, X', appartenant à η, tels que $A \subset B$ et $X' \subset B$. Si B est un modèle de T, X' est dit *τ-indiscernable au-dessus de A dans B* si le domaine de X' est un ensemble τ-indiscernable dans B, considéré comme réalisation de $T(A)$. Si B est un élément quelconque de η, X' est dit *τ-indiscernable au-dessus de A* si X' l'est dans un (donc dans tout) modèle de T étendant B.

EXEMPLE 2.8. Si $Y \subset X$, $X' \subset X$, et X' est contenu dans une classe d'équivalence de $\approx_Y$, on voit en appliquant 2.6(ii), que X' est τ'-indiscernable au-dessus de $M(Y)$, τ' étant le type de X'. En particulier, si le type τ de X est un ordinal, X est de cardinal régulier κ et $|Y| < \kappa$, il existe un tel X' κ-indiscernable au-dessus de $M(Y)$. Ceci est un cas particulier de la Proposition 2.8.

PROPOSITION 2.8. (a) *Soient $B \subseteq M(X)$, de cardinal régulier κ, et $A \subset B$, tels que $|A|+|L| < \kappa$. τ est suppose être un ordinal. Alors il existe $Y \subset X$ tel que $A \subseteq M(Y)$, et il existe $C \subset B$ et sur $\underline{C}$ une relation d'ordre de type κ, notée $<^*$, telle que pour tout n: (c), $(d) \in C^n$, $(\underline{c}_1 \cdots \underline{c}_n)$ et $(\underline{d}_1 \cdots \underline{d}_n)$ isomorphes pour $<^*$ entraîne*

$$(\underline{c}_1 \cdots \underline{c}_n) \approx_Y (\underline{d}_1 \cdots \underline{d}_n).$$

Il suit immédiatement de 2.6(ii) que C est κ-indiscernable au-dessus de $M(Y)$ dans L (définir l'interprètation de $<$ sur C par:

$$c_1 < c_2 \Leftrightarrow \underline{c}_1 <^* \underline{c}_2).$$

D'où: (b) *Si $\tau = \kappa_0$, et $M(X)$ est un modèle universel de T, les modèles de T*

ont la propriété suivante: si A, $B \in \eta$, $A \subset B$ et si κ est un cardinal régulier tel que

$$\kappa \leqq \kappa_0 \quad et \quad |A|+|L| < \kappa \leqq |B|,$$

B contient une sous-réalisation C, κ-indiscernable au-dessus de A dans L.

Démonstration de (a). Il existe $Y \subset X$ tel que

(i) $A \subseteq M(Y)$, $Y \subset X$, $|Y| < \kappa$.

Le cardinal de la relation d'équivalence $\approx_Y \restriction \underline{B}$ est $<\kappa$ (2.7a). κ étant régulier, il existe $\Gamma \subset B$ tel que:

(ii) $|\Gamma| = \kappa$, et $\underline{\Gamma}$ est contenu dans une classe d'équivalence de $\approx_Y \restriction \underline{B}$.

Si $t[v_1 \cdots v_n] \in L^{\#}(Y)$, et il existe $(x) \in (X - Y)^k$ tel que $x_1 < \cdots < x_k$ et $t(x_1 \cdots x_k) \in \underline{\Gamma}$, (ii) implique que

(iii) tout élément de $\underline{\Gamma}$ est de la forme $t(z)$, où $(z) \in (X-Y)^k$ et $z_1 < \cdots < z_k$.

Parmi les triplets $(Y, \underline{\Gamma}, t[v_1 \cdots v_k])$ satisfaisant (i), (ii), (iii), nous en choisissons un tel que k soit minimum.

Remarques. 1. Si $n \geqq 2$, et $t_1 \cdots t_n$, $t'_1 \cdots t'_n$ sont des termes de $L^{\#}(X)$

$$(t_1 \cdots t_n) \approx_Y (t'_1 \cdots t'_n)$$
$$\Leftrightarrow \text{pour tout couple } (i, j) \text{ tel que } 1 \leqq i, j \leqq n, \quad (t_i, t_j) \approx_Y (t'_i, t'_j).$$

2. L'hypothèse (ii) entraîne que pour tout n, la relation $\approx_Y$ équivaut sur $\underline{\Gamma}^n$ à a relation $\approx$.

3. Pour tout ensemble E ordonné par $<^*$ nous posons

$$E^{(n)} = \{(x) \in E^n ; x_1 <^* \cdots <^* x_n\}.$$

Soit $\underline{\Gamma}$ un ordre de type κ, noté $<^*$. S'il existe $\underline{C} \subseteq \underline{\Gamma}$ tel que $|\underline{C}| = \kappa$ et $\underline{C}^{(2)}$ est contenu dans une unique classe d'équivalence de $\approx$, (a) est démontré: car la restriction à $\underline{C}$ de la relation $<^*$ est de type κ, et les remarques ci-dessus impliquent que $\underline{C}$ vérifie les conditions du (a).

Le cardinal de la relation $\approx$ sur $\underline{\Gamma}^{(2)}$ est fini, et le théorème de Ramsey [5] implique alors l'existence de $\underline{C} \subseteq \underline{\Gamma}$ tel que $\underline{C}$ est infini et $\underline{C}^{(2)}$ est contenu dans une seule classe de $\approx$([5]). Mais la relation $\approx$ a une propriété plus forte:

Lemme 1. *Soit Γ_0 un sous-ensemble de X^k, muni d'un ordre de type κ noté $<^*$, et tel que*

(H): $\forall x \in X$ il existe moins de κ éléments $(z) \in \Gamma_0$ tels que x soit une coordonnée de (z).

Il existe $C_0 \subset \Gamma_0$ tel que $|C_0| = \kappa$ et $C_0^{(2)}$ est contenu dans une seule classe de $\approx$.

Nous montrerons également:

([5]) Ainsi sont démontrées les propriérés (a′) et (b′) obtenues en remplaçant dans (a) et (b) la condition "C de cardinal κ" par "C de cardinal ω". On peut se servir de (b′) au lieu de (b) pour démontrer le Théorème 5.5.(c), et en particulier le théorème de Morley.

LEMME 2. $\Gamma_0=\{(x);\ t(x)\in\Gamma\}$, *muni de l'ordre défini par*

$$(x) <^* (z) \Leftrightarrow \text{dans } \underline{\Gamma},\ t(x) <^* t(z)$$

satisfait les hypothèses du Lemme 1.

Alors si le Lemme 1 est appliqué à l'ensemble Γ_0 du Lemme 2,

$$\underline{C} = \{t(x), (x)\in C_0\},$$

muni de la relation $<^*$ induite par $\underline{\Gamma}$, satisfait évidemment les propriétés requises par la Remarque 3. Ainsi, (a) est démontré, et (b) s'en déduit aisément.

DÉMONSTRATION DU LEMME 2. Si $x\in X-Y$, soit

$$\Gamma_{ix} = \{(z);\ (z)\in\Gamma_0 \text{ et } x = z_i\} \qquad (1 \leqq i \leqq k).$$

Si le Lemme 2 n'est pas vérifié, il existe $x\in X-Y$ tel que $\bigcup\{\Gamma_{ix};\ 1\leqq i\leqq k\}$ soit de cardinal κ; supposons pour fixer les idées que $|\Gamma_{kx}|=\kappa$. Alors si

$$t'[v_1\cdots v_{k-1}] = t[v_1\cdots v_{k-1}x] \quad \text{et} \quad \underline{\Gamma}' = \{t(z);\ (z)\in\Gamma_{kx}\},$$

$(Y\cup\{x\},\ \underline{\Gamma}',\ t'[v_1\cdots v_{k-1}])$, satisfait (i), (ii), (iii) ce qui contredit la minimalité de k.

DÉMONSTRATION DU LEMME 1. Il existe un sous-ensemble de Γ_0 de cardinal κ et contenu dans une seule classe pour $\approx$. Alors, en restreignant Γ_0 à ce sous-ensemble, il est facile de voir qu'il suffit de démontrer le Lemme 1 dans le cas suivant:

$$(x)\in\Gamma_0 \Rightarrow x_1 < \cdots < x_k$$

(H') $(x), (z)\in\Gamma_0$, $\exists i, j$ tels que $x_i=z_j$ entraînent $(x)=(z)$ et $i=j$.

Hypothèse de récurrence (sur $n\geqq 1$): le Lemme 1 est démontré dans le cas $1\leqq k\leqq n$.

Cas $n=1$. Lorsque $k=1$, le Lemme 1 exprime seulement que, si Γ_0 est un sous-ensemble de X muni d'un ordre de type κ noté $<^*$, il existe un sous-ensemble de Γ_0, de cardinal κ, sur lequel les restrictions de $<$ et de $<^*$ coïncident. Ce qui est évident si κ est régulier.

Cas n quelconque. L'hypothèse de récurrence étant vraie en n, supposons $\Gamma_0\subset X^{n+1}$. Il existe Γ_n, de cardinal κ, tel que $\Gamma_n\subset\Gamma_0$ et $\{(x_1\cdots x_n);\ \exists x_{n+1}$ tel que $(x_1\cdots x_{n+1})\in\Gamma_n\}$ est contenu dans une seule classe d'équivalence pour $\approx$. En vertu de (H'), l'ensemble $E=\{x_{n+1};\ (x)\in\Gamma_n\}$ est de type $\geqq\kappa$ pour l'ordre $<$ sur X.

En prenant éventuellement au lieu de Γ_n un sous-ensemble plus petit, nous pouvons supposer que E est de type κ pour l'ordre $<$ sur X.

L'entier r $(r\leqq n)$ est défini par

$$r < i \leqq n+1 \Rightarrow \{x_i;\ (x)\in\Gamma_n\} \text{ est cofinal à } E,$$
$$i \leqq r \Rightarrow \{x_i;\ (x)\in\Gamma_n\} \text{ n'est pas cofinal à } E.$$

$C_0=\{(a^\alpha);\ \alpha<\kappa\}$ est un sous-ensemble de Γ_n défini par récurrence:

$$(a^0) <^* \cdots <^* (a^\beta) <^* \cdots$$

étant définis pour tout $\beta<\alpha$, (a^α) est un élément de Γ_n vérifiant:

$$\begin{array}{ll} \forall\beta < \alpha & (a^\beta) <^* (a^\alpha) \\ \forall\beta < \alpha & a^\beta_{n+1} < a^\alpha_{r+1} < \cdots < a^\alpha_{n+1}. \end{array}$$

(La première condition sur (a^α) peut être remplie de par la régularité de κ, la deuxième parce que, de plus, les ensembles $\{a_i; (a)\in\Gamma_n\}$ sont tous cofinaux lorsque $r<i\leqq n+1$.) C_0 satisfait la conclusion du Lemme 1, qui est donc démontré par récurrence sur n.

La suite du paragraphe ne sera pas utilisée ultérieurement.

DÉFINITION. Soient A, B, $C\in\eta$, $A\subset B$, $C\subset B$. C est dit indiscernable au-dessus de A si (pour tout n) (c), $(d)\in C^n$, $c_i\neq c_j$ et $d_i\neq d_j$ $(i\neq j)$ impliquent pour toute formule $\psi[v_1\cdots v_n]\in L(A)$:

$$T(B)\vdash\psi[c]\leftrightarrow\psi[d].$$

PROPOSITION 2.9. *T est supposé stable en un cardinal κ. Alors pour tout type d'ordre infini τ, si C est τ-indiscernable au-dessus de A, C est indiscernable au-dessus de A.*

Sinon, B étant tel que $A\subset B$, $C\subset B$, il existerait $\psi[v_1\cdots v_n]\in L(A)$, $c_1<\cdots<c_n$ et $c'_1<\cdots<c'_n$ dans C, et une permutation σ telle que

$$T(B)\vdash\psi[c_1\cdots c_n]\ \wedge\ \neg\psi[c'_{\sigma_1}\cdots c'_{\sigma_n}].$$

C étant τ-indiscernable, il s'en déduirait que pour tous éléments distincts $d_1\cdots d_n$ de C, il existe deux permutations α et β telles que

$$T(B)\vdash\psi[d_{\alpha_1}\cdots d_{\alpha_n}]\ \wedge\ \neg\psi[d_{\beta_1}\cdots d_{\beta_n}]$$

[2, 3.9] montre alors l'existence de $Z\in\eta$, tel que $|Z|=\kappa$ et $|S(Z)|>\kappa$, ce qui contredit l'hypothèse.

3. **Théories stables en un cardinal**(6).

DÉFINITIONS. (3.1) Un *arbre de longueur κ* est un ensemble t de suites de longueur κ, appelées *branches de t*, et telles que, si $x=(x_i)_{i<\kappa}$ et $y=(y_i)_{i<\kappa}$ sont des branches de t, le domaine de $x\cap y$ est un ordinal. Autrement dit, "quand deux branches de t se sont séparées, elles ne se rejoignent plus". Si $x\in t$, et $i<\kappa$, la suite $x\restriction i$ est appelée un *noeud de longueur i de t*; n_1 et n_2 étant deux noeuds ou branches de t, nous disons que *n_2 sort de n_1* si $n_1\subseteq n_2$.

---

(6) Le cas $|L|=\omega$ de 3.4 est dû à M. Morley, [2]. F. Rowbottom a montré 3.4 et 3.5 en supposant seulement $\kappa_1^\omega>\kappa_1$, au lieu de [cofinalité de κ_1]$=\omega$, mais en utilisant H.C.G. (cf. Introduction).

Le cas $\kappa=\omega$ de 3.6 est dû à M. Morley, [2]. Le cas général a été obtenu par F. Rowbottom (impublié), et retrouvé par l'auteur.

Un noeud de longueur i de t, n, *porte une séparation d'ordre* μ *dans* t si μ est le nombre de noeuds de longueur $i+1$ de t qui sortent de n. $\kappa(t)$ désigne le plus petit cardinal μ tel que:

si n est un noeud de t, l'ordre de n dans t est $\leqq \mu$;

le nombre de noeuds d'ordre >1 dans t est $\leqq \mu$;

l'arbre t est dit *clos* s'il existe $x \in t$ vérifiant

$$i < \kappa \Rightarrow x \text{ sort de } n_i,$$

pour chaque suite $(n_i)_{i<\kappa}$ de noeuds de t telle que n_i soit de longueur i, et n_{i+1} sorte de n_i.

(3.2) Soit $\{A_i; i \leqq \kappa\}$ une chaîne croissante de réalisations de η, A_κ étant la réunion des A_i pour $i<\kappa$.

Si $i<j<\kappa$, et $p \in S(A_j)$, p_i désigne $p \cap L(A_i)$. Alors $S(A_i)=\{p_i; p \in S(A_j)\}$, d'après 0.2 (i).

Il est facile de montrer que $t=\{(p_i)_{i<\kappa}; p \in S(A_\kappa)\}$ est un arbre clos de longueur κ.

(3.3) Si $t_0 \subseteq t$, et t est l'arbre défini en (3.2), nous construisons par récurrence (et à l'aide de l'axiome du choix) une fonction f_{t_0}, définie sur l'ensemble des noeuds de t_0 et à valeurs dans $L(A_\kappa, v_0)$. Si la longueur de n (noeud de t) est:

(i) $0, f_{t_0}(n)=0$;

(ii) un ordinal limite $\delta<\kappa, f_{t_0}(n)=\bigcup \{f_{t_0}(n \restriction i); i<\delta\}$;

(iii) un ordinal $\alpha+1$, définir $f_{t_0}(n)$ comme suit.

Poser $n=(n_i)_{i<\alpha+1}$; pour chaque $i<\alpha+1$, $n_i \in S(A_i)$. Soit μ tel que $n \restriction \alpha$ porte une séparation d'ordre μ dans t_0. Si $\mu=1$, poser

$$f_{t_0}(n) = f_{t_0}(n \restriction \alpha).$$

Si $\mu>1$, soit $\{n^\nu; \nu<\mu\}$ une énumération des noeuds de t_0 de longueur $\alpha+1$ et qui sortent de $n \restriction \alpha$, avec $n=n^0$; poser:

$$f_{t_0}(n) = f_{t_0}(n \restriction \alpha) \cup \{\phi^\nu; 1 \leqq \nu < \mu\},$$

où ϕ^ν est une formule de $L(A_{\alpha+1}, v_0)$ telle que $\phi^\nu \in n_\alpha$ et $\neg\phi^\nu \in n^\nu$. Ainsi f_{t_0} est défini. Soit A_{t_0} la restriction de A_κ à l'ensemble des constantes de $L(A_\kappa)$ qui apparaissent dans au moins une formule de

$$\bigcup \{f_{t_0}(n); n \text{ noeud de } t_0\}.$$

Si $x \in t_0$, l'ensemble de formules

$$\bigcup \{f_{t_0}(n); x \text{ sort de } n\}$$

est consistant avec $T(A_{t_0})$; mais si $x, y \in t_0$ et $x \neq y$,

$$\bigcup \{f_{t_0}(n); x \text{ sort de } n\} \cup \bigcup \{f_{t_0}(n); y \text{ sort de } n\}$$

est inconsistant.

Par conséquent, $|S(A_{t_0})| \geqq |t_0|$. Cependant, $|A_{t_0}| \leqq \kappa(t_0)$.

PROPOSITION 3.4. *Si T est stable en un cardinal κ_1, et [cofinalité de κ_1]$=\omega$, T est stable en tout cardinal $\geqq \kappa_1$.*

3.4 résulte du lemme suivant:

LEMME 3.5. *Soient κ_1, κ, et t un arbre clos de longueur κ, tels que [cofinalité de κ_1] $=\omega$ et $\kappa_1<\kappa$; $\kappa(t) < \kappa|t|$. Il existe $t_0 \subseteq t$ tel que $|\kappa(t_0)| \leqq \kappa_1 < |t_0|$.*

DÉMONSTRATION DE 3.4 À PARTIR DE 3.5. T est une théorie stable en un cardinal κ_1 de cofinalité ω.

Supposons que κ est un cardinal $>\kappa_1$ tel que T est stable en λ si $\kappa_1 \leqq \lambda < \kappa$ mais T n'est pas stable en κ. Il existe une chaîne croissante de membres de η, $\{A_i; i \leqq \kappa\}$, tels que

$$|A_i| < \kappa \text{ si } i < \kappa, \quad A_\kappa = \bigcup_{i<\kappa} A_i, \quad |A_\kappa| = \kappa \text{ et } |S(A_\kappa)| > \kappa.$$

Soit t l'arbre défini à partir de $\{A_i; i<\kappa\}$ en 3.2; t vérifie toutes les hypothèses de 3.5. Soient donc t_0 le sous-arbre de t obtenu par 3.5 et A_{t_0}, défini à partir de t_0 comme en 3.3.

$$|S(A_{t_0})| \geqq |t_0| > \kappa_1,$$

cependant, $|A_{t_0}| \leqq \kappa_1$ ce qui contredit l'hypothèse faite sur T.

DÉMONSTRATION DE 3.5.

NOTATION. Si n est un noeud d'un arbre t', l'arbre formé par toutes les branches de t' qui sortent de n est noté $t'(n)$.

Soit $t_2=\{x; x \in t$, et il existe un noeud de t, n, tel que x sort de n et $|t(n)| \leqq \kappa\}$. Soit $t_1=t-t_2$; il est évident que $|t_2| \leqq \kappa$ et $|t_1|>\kappa$, et si n est un noeud de t_1, $|t_1(n)|>\kappa$.

Soit $\{\mu_p; p \in \omega\}$ une suite croissante de cardinaux, de limite κ_1.

(a) Supposons que pour tout noeud de t_1, n, et tout $p \in \omega$, il existe un ensemble de noeuds de $t_1(n)$, $g_p(n)$, tel que

$$|g_p(n)| = \mu_p; \qquad n_1, n_2 \in g_p(n), n_1 \neq n_2 \Rightarrow n_1 \nsubseteq n_2 \text{ et } n_2 \nsubseteq n_1.$$

Pour tout entier p, soit h_p, ensemble de noeuds de t_1 ainsi défini:

$$h_0 = \{n_0\}, \qquad h_{p+1} = \bigcup \{g_p(n); n \in h_p\}.$$

Soit

$$b = \{(n_i)_{i\in\omega}; n_{i+1} \in h_{i+1}-h_i, \text{ et } n_{i+1} \text{ sort de } n_i \text{ pour tout } i \in \omega\}.$$

t étant clos, pour chaque élément de b, $c=(n_i)_{i<\omega}$, il existe une branche de t, $x(c)$, telle que $x(c)$ sort de n_i pour tout $i \in \omega$.

Soit $t_0=\{x(c); c \in b\}$. t_0 vérifie les conclusions voulues, car t_0 est clos et

$$|t_0| = |b| = \kappa_1^\omega > \kappa_1.$$

Soit λ la cofinalité de κ.

(b) Si $\lambda>\kappa_1$, l'hypothèse (a) est vérifiée: soit $n \in t_1$ et soit b un sous-ensemble de $t_1(n)$ tel que $|b|=\mu_p$; comme $\mu_p<\lambda$, il existe $j<\kappa$ tel que, pour tous éléments $x, y \in b$ tels que $x\neq y$, $x \restriction j \neq y \restriction j$; poser alors $g_p(n)=\{x \restriction j; x \in b\}$.

Le seul cas non résolu est donc le suivant:

(c) $\lambda < \kappa_1$, et il existe un noeud de t_1, n, un entier p_0, tels que pour tout $i < \kappa$

$$\{x \restriction i;\, x \in t_1(n)\} \text{ est de cardinal } \leqq \mu_{p_0}.$$

Cette hypothèse entraîne que pour tout i, $\kappa(t_1(n) \restriction i) \leqq \mu_{p_0}$. Donc

$$\kappa(t_1(n)) \leqq \mu_{p_0}^{+} < \kappa_1 \qquad \text{(en fait même } \kappa(t_1(n)) \leqq \mu_{p_0})$$

et $t_0 = t_1(n)$ vérifie les conclusions recherchées.

REMARQUE. Si l'on suppose λ' tel que

$$\kappa_1^{\omega} > \lambda' \qquad \kappa > \lambda'$$

l'arbre t_0 défini dans la Démonstration 3.5 vérifie $|t_0| > \lambda'$.

PROPOSITION 3.4 (SUITE). *Si T est stable en λ et κ_1, κ est un cardinal tel que*

$$[\textit{cofinalité de } \kappa_1] = \omega \textit{ et } \lambda < \kappa_1^{\omega}$$

alors T est stable en tout cardinal $\geqq \lambda$.

Démonstration semblable, mais utilisant la remarque ci-dessus au lieu du Lemme 3.5.

DÉFINITION 3.6. Soient $A \in \eta$, $p \in S(A)$, et $I \subset L(A, v_0)$.

p est isolé par $I \Leftrightarrow I \subset p$ et $p = \{\psi;\, \psi \in L(A, v_0),\, T(A) \cup I \vdash \psi\}$.

p est λ-isolé $\Leftrightarrow$ il existe I tel que $|I| < \lambda$, et p est isolé par I.

Les points λ-isolés sont denses dans $S(A) \Leftrightarrow$ pour toute formule $\sigma \in L(A, v_0)$, il existe $p \in S(A)$, λ-isolé, contenant σ.

PROPOSITION 3.6. *Si T est stable en κ, et $2^{\lambda} > \kappa$, les points λ-isolés sont denses dans $S(A)$, pour tout $A \in \eta$.*

DÉMONSTRATION. Soit λ' le plus petit cardinal tel que $2^{\lambda'} > \kappa$. Soit $\sigma(v_0) \in L(A, v_0)$ et supposons

(i) σ n'appartient à aucun point λ'-isolé de $S(A)$.

Il existe une suite d'arbres $\{t_i;\, i \leqq \lambda'\}$, dont les branches sont des suites de formules de $L(A, v_0)$, et vérifiant:

$$t_0 = \{0\}; \quad t_i \text{ est de longueur } i \text{ et } |t_i| = 2^i; \qquad \text{si } i<j,\ t_i = \{x \mid i;\, x \in t_j\};$$

(ii) si $x, y \in t_i$, $x = (x_j)_{j<i}$ et $y = (y_j)_{j<i}$,

$T(A) \cup \{\sigma\} \cup \{x_j;\, j < i\}$ est consistant et $\{x_j;\, j < i\} \cup \{y_j;\, j < i\}$ est inconsistant.

En effet, supposons obtenue $\{t_i;\, i<j\}$ vérifiant les conditions ci-dessus pour $i<j$.

Si j est un ordinal limite, poser $t_j = \{(x_i)_{i<j};\, x_i \in t_i \text{ pour tout } i<j\}$.

Si $j = i+1$, pour tout $x = (x_l)_{l<i} \in t_i$, il existe $\phi_x \in L(A, v_0)$, non décidée par $T(A) \cup \{\sigma\} \cup \{x_l;\, l<i\}$; sinon (i) serait contredit. Alors

$$t_j = \{f_1(x);\, x \in t_i\} \cup \{f_2(x);\, x \in t_i\},$$

où $f_1(x)$ désigne la suite de longueur $j=i+1$ obtenue en adjoignant à x la formule ϕ_x comme $j$ème coordonnée, $f_2(x)$ la suite obtenue en ajoutant $\neg\phi_x$ au lieu de ϕ_x.

La suite $\{t_i; i \leqq \lambda'\}$ peut donc être construite, et soit A' la restriction de A à l'ensemble des constantes qui apparaissent dans une formule de

$$\{x_i; i < \lambda', (x_i)_{i<\lambda'} \in t_{\lambda'}\}.$$

A' est de cardinal $\leqq \lambda'$; d'autre part, si $(x_i)_{i<\lambda'} \in t_{\lambda'}$, il existe $p \in S(A')$ tel que $\{x_i; i<\lambda'\} \subseteq p$. Il en résulte que

$$|S(A')| \geqq |t_{\lambda'}| = 2^{\lambda'} > \kappa,$$

ce qui contredit l'hypothèse de la proposition. Donc (i) est impossible, ce qu'il fallait démontrer.

N.-B. Dans (i) et dans la démonstration, σ pourrait être remplaçée par Σ, sous-ensemble de $L(A, v_0)$ consistant avec $T(A)$, et de cardinal quelconque; cela montrerait l'existence de $I \subseteq L(A, v_0)$, tel que $|I| < \lambda$, et $\Sigma \cup I$ soit contenu dans un unique point de $S(A)$.

4. **Omission d'un ensemble de formules**(7).

Définition. Soient $A \in \eta$, $p \in S(A)$, $\Psi \subseteq p$, B un modèle de T étendant A. B omet $\Psi \Leftrightarrow$ aucun point de B ne réalise Ψ. Ψ est omis en $\kappa \Leftrightarrow$ il existe un modèle de T, de cardinal κ, omettant Ψ.

Proposition 4.1. *Soit Ψ un ensemble de formules de L ayant la variable libre v_0.*

Cas $|L|=\omega$. Si pour tout $\lambda < \beth_{\omega_1}$, Ψ est omis en λ, Ψ est omis en tout cardinal $\geqq \omega$.

Cas $|L| \geqq \omega$. Si $\mu=(2^{|L|})^+$, et pour tout $\lambda < \beth_\mu$, Ψ est omis en λ, Ψ est omis en tout cardinal $\geqq |L|$.

Cf. [3] pour la démonstration de ce théorème. Remarquer que si $\lambda \geqq |L|$ et si Ψ est omis en un cardinal $> \lambda$, Ψ est omis en λ.

Proposition 4.2. *Si $\mu=(2^{|L|+})$, et pour tout $\lambda < \beth_\mu$ il existe un modèle non $|L|$-saturé de T de cardinal $\geqq \lambda$, il existe un modèle non $|L|$-saturé en tout cardinal $\geqq |L|$.*

Démonstration. Pour tout λ tel que $|L| \leqq \lambda < \beth_\mu$, il existe un couple (A, p) tel que $|A| < |L|$, $p \in S(A)$, p est omis en λ. Le nombre de couples non isomorphes (A, p) tels que $|A| < |L|$ et $p \in S(A)$ est au plus $2^{|L|}$. Comme $2^{|L|} <$ cofinalité de $\beth_\mu$, il existe (A_0, p_0), tel que $|A_0| < |L|$, $p_0 \in S(A_0)$, et p_0 est omis en tout λ tel que $|L| \leqq \lambda < \beth_\mu$.

Le Théorème 4.1, appliqué à la théorie $T(A_0)$, conclut que p_0 est omis en tout cardinal $\geqq |L|$. C.Q.F.D.

L'hypothèse suivante est faite jusqu'à la fin du paragraphe: λ est un cardinal, tel que pour tout $A \in \eta$, les points λ-isolés sont denses dans $S(A)$.

---

(7) 4.1, et le cas $\lambda=\omega$ de 4.3 sont dus à M. Morley, [2] et [3].

4.8 a été obtenu par F. Rowbottom (impublié), et retrouvé indépendamment par l'auteur.

B_0 étant un élément quelconque de η, un modèle de T, B, étendant B_0, est construit de la manière suivante.

CONSTRUCTION DE B. Soit $\kappa = |L| + |B_0|$. B est la réunion d'une chaîne croissante $\{B_\alpha; \alpha < \kappa \cdot \omega\}$ définie par induction: si $B_{\kappa \cdot n}$ est déjà obtenu et de cardinal $\leqq \kappa$, et si $\{\psi_\alpha; \kappa \cdot n \leqq \alpha < \kappa \cdot (n+1)\}$ est une énumèration fixée de $L(B_{\kappa \cdot n}, v_0)$,

$$\{B_\alpha; \kappa \cdot n \leqq \alpha \leqq \kappa \cdot (n+1)\}$$

est choisi de manière à satisfaire pour tout α compris entre $\kappa \cdot n$ et $\kappa \cdot (n+1)$ les conditions suivantes:

Si α est ordinal limite, $B_\alpha = \bigcup \{B_\beta; \beta < \alpha\}$;

$B_{\alpha+1}$ est une réalisation de la forme $B_\alpha\{b_\alpha\}$; et b_α réalise un point λ-isolé de $S(B_\alpha)$;

b_α réalise ψ_α.

N.-B. Si ψ_α est déjà réalisée par $b \in B_\alpha$ on peut prendre $b_\alpha = b$ et $B_{\alpha+1} = B_\alpha\{b_\alpha\} = B_\alpha$.

Puisque, par construction, toute formule de $L(B_{\kappa \cdot n}, v_0)$ est réalisée dans $B_{\kappa \cdot (n+1)}$, toute formule de $L(B, v_0)$ est réalisée dans B. B est donc un modèle de T d'après 0.2(iii).

DÉFINITION 4.3. Soient C_0, $C \in \eta$, C est dit λ-premier au-dessus de C_0 si $C_0 \subseteq C$ et si tout isomorphisme de C_0 dans un modèle A de T satisfaisant S_λ s'étend en un isomorphisme de C dans A.

$$A \text{ satisfait } S_\lambda \Leftrightarrow \text{si } p \in S(A),\ \Sigma \subseteq p, \text{ et } |\Sigma| < \lambda,\ \Sigma \text{ est réalisé dans } A.$$

(En particulier si $p \in S(A)$ et est λ-isolé, p est réalisé dans A. S_ω est toujours vérifié d'après 0.2(iii). Si $\lambda > |L|$,

$$A \text{ vérifie } S_\lambda \Leftrightarrow A \text{ est } \lambda\text{-saturé.})$$

LEMME 4.3. (i) *Si $C = C_0\{c\}$ et c réalise un point q, λ-isolé de $S(C_0)$, C est λ-premier au-dessus de C_0.*

DÉMONSTRATION. Soit f un isomorphisme de C_0 dans un modèle A.

Si q est λ-isolé,

$$f(q) = \{\psi[v_0 fc_1 \cdots fc_n];\ \psi[v_0 v_1 \cdots v_n] \in L,\ \psi[v_0 c_1 \cdots c_n] \in q\}$$

est un point λ-isolé de $S(f(C_0))$.

Si A satisfait S_λ, ce point est réalisé par $a \in A$; f s'étend alors en posant $f(c) = a$.

(ii) *Si $\{C_\alpha; \alpha \leqq \gamma\}$ est une chaîne croissante de membres de η, telle que*

α ordinal limite $\Rightarrow C_\alpha = \bigcup \{C_\beta; \beta < \alpha\}$

$\alpha = \beta + 1 \Rightarrow C_\alpha$ est λ-premier au-dessus de C_β,

C_γ est λ-premier au-dessus de C_0.

(En effet, si f_0 est un isomorphisme de C_0 dans un modèle A satisfaisant S_λ, par récurrence, il est facile de construire une chaîne d'isomorphismes

$$\{f_\alpha; f_\alpha : C_\alpha \to A,\ \alpha \leqq \gamma\}$$

telle que $\beta \leqq \alpha \Rightarrow f_\beta = f_\alpha \upharpoonright C_\beta$. Alors f_γ est un isomorphisme qui étend f_0 à A_γ.)

PROPOSITION 4.3. *Le modèle B est λ-premier au-dessus de B_0.*

(Appliquer 4.3, (i) et (ii), à la chaîne $\{B_\alpha;\ \alpha<\kappa\cdot\omega\}$.)

NOTATIONS. Pour tout $\alpha<\kappa\cdot\omega$, q_α est le point de $S(B_\alpha)$ réalisé par b_α, et $I_\alpha[v_0]$ un sous-ensemble de q_α fixé, tel que $|I_\alpha[v_0]|<\lambda$ et $I_\alpha[v_0]$ isole q_α. En particulier, si $b_\alpha\in B_\alpha$, $I_\alpha[v_0]$ est l'ensemble réduit à la seule formule: $v_0=b_\alpha$.

Si b est une constante, $I_\alpha[b]=\{\psi[b];\ \psi[v_0]\in I_\alpha[v_0]\}$.

LEMME 4.4. *Soit $B^\alpha_{\alpha+1}$ la plus petite sous-réalisation de B qui contienne b_α et telle que, pour tout $\beta\leqq\alpha$,*

$$b_\beta\in B^\alpha_{\alpha+1} \Rightarrow I_\beta[v_0]\subseteq L(B^\alpha_{\alpha+1}, v_0).$$

Si pour tout $\beta\leqq\alpha+1$, B^α_β est la réalisation $B^\alpha_{\alpha+1}\cap B_\beta$, la chaîne $\{B^\alpha_\beta;\ \beta\leqq\alpha+1\}$ a les propriétés suivantes:

(i) $|B^\alpha_{\alpha+1}|<\lambda$ *si* λ *est régulier, sinon* $|B^\alpha_{\alpha+1}|\leqq\lambda$,

(ii) *si* $B^\alpha_{\beta+1}=B^\alpha_\beta\{b_\beta\}$, b_β *réalise un point λ-isolé de* $S(C)$, *pour tout C tel que* $B^\alpha_\beta\subseteq C\subseteq B_\beta$.

DÉMONSTRATION. Supposons que $\forall\beta<\alpha$, $|B^\beta_{\beta+1}|<\lambda$.

$$B^\alpha_{\alpha+1} = \bigcup\{B^\beta_{\beta+1};\ \beta\in E\}\cup\{b_\alpha\}$$

où $\beta\in E\Leftrightarrow$ une formule de $I_\alpha[v_0]$ contient la constante b_β.

Comme $|I_\alpha[v_0]|<\lambda$, $|E|<\lambda$ et donc

$$|B^\alpha_{\alpha+1}| = \Sigma\{|B^\beta_{\beta+1}|;\ \beta\in E\} < \lambda,$$

si λ est régulier ($\leqq$sinon).

D'où (i) par récurrence sur $\alpha<\kappa\cdot\omega$.

Supposons que $B^\alpha_{\beta+1}=B^\alpha_\beta\{b_\beta\}$. Alors, si $B^\alpha_\beta\subseteq C$, $I_\beta[v_0]\subset L(C, v_0)$. Si $C\subseteq B_\beta$, le point de $S(C)$ réalisé par b_β est $q_\beta\cap L(C)$. Comme q_β est isolé par $I_\beta[v_0]$, $q_\beta\cap L(C)$ est encore isolé par $I_\beta[v_0]$, d'après 4.5 (iii) ci-dessous et (ii) est ainsi prouvé.

LEMME 4.5. *Soient A, B, éléments de η, tels que $A\subset B$. Soient Φ et I, sous-ensembles de $L(A, v_0)$, $L(B, v_0)$ respectivement, et $\phi\in\Phi$, $\sigma\in I$.*

NOTATIONS. σ, appartenant à $L(B, v_0)$, est de la forme $\sigma[v_0b_1\cdots b_n]$, où $b_1\cdots b_n \in B-A$, $\sigma[v_0\cdots v_n]\in L(A, v_0)$; on note σ^* la formule de $L(A, v_0)$:

$$\exists v_1\cdots\exists v_n\sigma[v_0v_1\cdots v_n]$$

et I^* l'ensemble:

$$\{\psi^*;\ \psi \text{ est une conjonction de formules de } I\}.$$

Les propriétés ci-dessous sont des conséquences immédiates: (i) des règles usuelles du calcul des prédicats; (ii) de (i) et du théorème de finitude; (iii) de (ii) et de ce que $T(A)$ est complet dans $L(A)$.

(i) $T(A)\cup\{\sigma\}\vdash\phi \Rightarrow T(A)\cup\{\sigma^*\}\vdash\phi$;

(ii) $T(A)\cup I\vdash\Phi \Rightarrow T(A)\cup I^*\vdash\Phi$;

(iii) $T(B)\cup I\vdash\Phi \Rightarrow T(A)\cup I^*\vdash\Phi$.

Proposition 4.6. *Soit A vérifiant S_λ. Si B_0 est localement plongeable dans A, B est localement plongeable dans A. Précisément: si λ est régulier, et si λ' est tel que toute partie de B_0 de cardinal $<\lambda+\lambda'$ est isomorphe à une partie de A, alors toute partie de B de cardinal $<\lambda+\lambda'$ est isomorphe à une partie de A.*

Si λ n'est pas régulier la proposition vaut, une fois $<$ remplacé par $\leqq$.

Démonstration. Soit $C\subset B$, tel que $|C|<\lambda+\lambda'$ ($\leqq$, si λ est singulier). Avec les notations du 4.4, soit

$$B' = \bigcup \{B^{\alpha}_{\alpha+1}; b_\alpha \in C\};$$

4.4(i) entraîne $|B'|<\lambda+\lambda'$ ($\leqq$, si λ est singulier); 4.4(ii) et 4.3(i), que la chaîne $\{B_\alpha \cap B'; \alpha<\kappa\cdot\omega\}$ vérifie les conditions de 4.3(ii).

B' est donc λ-premier au-dessus de $B'\cap B_0$. Par hypothèse, il existe un isomorphisme de $B'\cap B_0$ dans A, qui s'étend en isomorphisme de B' dans A.

Lemme 4.7. *(T est toujours supposé vérifier: pour tout $A\in\eta$, les points λ-isolés sont denses dans $S(A)$.) Soit B un modèle de T vérifiant S_λ, et contenant un ensemble X τ-indiscernable dans B, où τ est un type infini. On peut associer à tout ensemble Z, ordonné par $<$, un modèle de T noté $P(Z)$, de cardinal $\leqq|L|+|Z|$, de façon que si Z est localement plongeable dans X pour $<$, $P(Z)$ soit localement plongeable dans B. Précisément: si toute partie de Z de cardinal $\leqq\lambda$ est isomorphe à une partie de X pour $<$, toute partie de $P(Z)$, de cardinal $\leqq\lambda$ est isomorphe à une partie de B.*

Démonstration. En appliquant 2.2 dans le cas $T'=T$, $M=B$, on associe à tout ensemble Z; ordonné par $<$, un modèle noté $B(Z)$. Choisir alors pour $P(Z)$ un modèle λ-premier au-dessus de la réalisation: restriction à Z de $B(Z)$, et appliquer 2.2 et 4.6.

N.-B. Si T est stable en tout cardinal $\geqq|L|$, il est possible de choisir $P(Z)$ pour chaque Z, de manière à vérifier la propriété supplémentaire (qui se rapproche de 2.5): si Z, Z', sont ordonnés par $<$, et si toute partie de Z de cardinal $\leqq\lambda+\lambda'$ (λ' quelconque) est isomorphe pour $<$ à une partie de Z', toute partie de $P(Z)$ de cardinal $\leqq\lambda+\lambda'$ se plonge dans $P(Z')$.

Proposition 4.8. *λ est supposé régulier. Alors si $B_0\in\eta$, tout point de $S(B_0)$ qui n'est pas λ-isolé peut être omis.*

Démonstration. Nous allons montrer plus précisément que B omet tout point non λ-isolé de $S(B_0)$. Soit donc b_α ($\alpha<\kappa\cdot\omega$) un point fixé de B; nous voulons montrer que le point de $S(B_0)$ réalisé par b_α est λ-isolé.

Par définition de $I_\beta[v_0]$, si $\beta<\kappa\cdot\omega$, $T(B_{\beta+1})$ équivaut à $T(B_\beta)\cup I_\beta[b_\beta]$. Il s'en déduit facilement, par induction sur α:

$$T(B_{\alpha+1}) \text{ équivaut à } T(B_0)\cup\bigcup\{I_\beta[b_\beta]; \beta\leqq\alpha\}.$$

Par conséquent, si I désigne

$$\bigcup\{I_\beta[b_\beta]; \beta<\alpha\}\cup I_\alpha[v_0],$$

nous savons que $T(B_0) \cup I \vdash q_\alpha$ et d'après 4.5(ii),

$$T(B_0) \cup I^* \vdash q_\alpha \cap L(B_0, v_0)$$

c'est à dire: le point de $S(B_0)$ réalisé par b_α est isolé par I^*.

(a) Si $|B_{\alpha+1} - B_0| < \lambda$, $|I^*| < \lambda$: cela résulte immédiatement de la régularité de λ et de l'hypothèse: $|I_\alpha| < \lambda$ pour tout α.

Par conséquent: Si (a) est vérifié, le point de $S(B_0)$ réalisé par b_α est λ-isolé.

(b) Supposons que $|B_{\alpha+1} - B_0| \geqq \lambda$.

Ci dessous est construite une chaîne croissante $\{B'_\beta; \beta \leqq \alpha+1\}$ de sous-réalisations de B, telles que

$B'_0 = B_0$, $b_\alpha \in B'_{\alpha+1}$ et $|B'_{\alpha+1} - B_0| < \lambda$;

si β est ordinal limite, $B'_\beta = \bigcup \{B'_\gamma; \gamma < \beta\}$

ou bien $B'_{\beta+1} = B'_\beta$, ou bien $B'_{\beta+1} = B'_\beta\{b_\beta\}$, et b_β réalise un point λ-isolé de $S(B'_\beta)$.

Comme ces propriétés nous ont suffi en (a) pour démontrer que b_α réalise un point λ-isolé de $S(B_0)$, il en est de même ici.

Construction de $\{B'_\beta; \beta \leqq \alpha+1\}$: $B'_{\alpha+1}$ est la restriction de B à l'ensemble

$$\text{domaine de } B_0 \cup \text{domaine de } B^\alpha_{\alpha+1};$$

$B'_\beta = B_\beta \cap B'_{\alpha+1}$, pour tout $\beta \leqq \alpha+1$. Alors les propriétés annoncées de la chaîne $\{B'_\beta; \beta \leqq \alpha+1\}$ sont vérifiées d'après 4.4, et 4.5.

5. Théories catégoriques en un cardinal(8).

Notations. λ_0 est le plus petit cardinal vérifiant $2^{\lambda_0} > |L|$. λ_1 est le plus petit cardinal vérifiant

$$\lambda_1^\omega > |L| \text{ et [cofinalité de } \lambda_1] = \omega.$$

(Si l'hypothèse du continu généralisée vaut, λ_1 est le premier cardinal de cofinalité ω qui soit $\geqq |L|$.)

Jusqu'à la Proposition 5.5, nous faisons l'hypothèse suivante:

(I) *T est une théorie catégorique en un cardinal κ_0 tel que $\kappa_0 > |L|$ et $\kappa_0 \neq \lambda_1$.*

Alors si X est un ensemble ordonné par $<$, de type κ_0, $M(X)$ est un modèle de T de cardinal κ_0, donc $M(X)$ est universel, et par 2.7, (même si $\kappa_0 = \lambda_1$), T est stable en tout cardinal λ tel que $|L| \leqq \lambda < \kappa_0$. Il s'en déduit (3.4):

$$\textit{Si } \kappa_0 > \lambda_1, \textit{ T est stable en tout cardinal } \geqq |L|.$$

Proposition 5.1. *Si T vérifie* (I), *le modèle de T de cardinal κ_0 est saturé.*

(8) Le cas $|L| = \omega$ de 5.3 est dû à M. Morley, [2] (cf. aussi les notes 4 et 6 en ce qui concerne 5.3(a)). M. Morley a également obtenu ce cas en supposant seulement T stable en ω.

Rappelons que [6] contient le résultat suivant, qui se rapproche de 5.5(a):

On suppose H.C.G., et l'existence d'un cardinal mesurable $> |L|$. Si T est catégorique en un cardinal $\kappa_0 > |L|$, T est catégorique en tout cardinal $> \kappa_1$. ($|L|$ est supposé régulier, et κ_1 est le premier cardinal limite $\geqq |L|$.)

En utilisant 5.5, on en déduit que T est également catégorique en tout cardinal $\geqq \kappa_0$.

DÉMONSTRATION. Si κ_0 est régulier, appliquer 1.2a. Sinon, comme $\kappa_0 \neq \lambda_1$, nécessairement $\kappa_0 > \lambda_1$, et T est stable en κ_0. 1.2(b) montre que le modèle de T de cardinal κ_0 est λ-saturé, pour tout cardinal régulier $\lambda < \kappa_0$, ce qui entraîne qu'il est saturé.

PROPOSITION 5.2. *Soit $M(Z)$ un modèle défini comme en* 2.5, *le type de Z (pour $<$) étant un ordinal $\geqq |L|$. $M(Z)$ est un modèle saturé de T.*

DÉMONSTRATION. Il revient au même, supposant $M(Z)$ non saturé, d'en déduire l'existence d'un modèle de T non saturé et de cardinal κ_0, contredisant 5.1.

Supposons donc $A \subset M(Z)$, tel que:

$|A| < |M(Z)| = |Z|$;

un point p de $S(A)$ est omis dans $M(Z)$.

Il existe $Y \subset Z$ tel que $|Y| < |Z|$ et $A \subseteq M(Y)$. Vu 2.7(a), il existe $X \subseteq Z - Y$, infini, et contenu dans une seule classe d'équivalence pour $\approx_Y$.

Alors: (i) p est omis dans $M(Y \cup X)$ et comme dans l'exemple 2.8,

(ii) X est τ-indiscernable au-dessus de A, τ étant un type d'ordre infini.

Nous pouvons appliquer 2.5, en prenant $T^{\#} \cup T(A)$ pour théorie au lieu de $T^{\#}$, et $M(Y \cup X)^{\#}$, X, au lieu de $M^{\#}$, X_0. En effet lorsque $M(Y \cup X)^{\#}$ est considéré comme réalisation de $L^{\#}(A)$, X est τ-indiscernable dans $M(Y \cup X)$ par définition de (ii); et de plus $M(Y \cup X)^{\#}$ satisfait $T^{\#} \cup T(A)$.

La correspondance obtenue alors par 2.5 est notée $Z \to M_A(Z)$. Il résulte de 2.5(ii) que $M_A(X)$ omet p. Tout ensemble ordonné par $<$, Z_0, se plonge finiment dans X. Alors, par 2.5(i), $M_A(Z_0)$ omet p.

En particulier, si Z_0 est de type κ_0 pour $<$, et

(iii) $|A| < \kappa_0$,

$M_A(Z_0)$ est un modèle non saturé de T, de cardinal κ_0. La démonstration est donc achevée dans le cas (iii).

Si (iii) n'est pas vérifié, on se ramène à ce cas en exhibant $Y' \subset Y$ et $X' \subset X$ tels que, A' étant $A \cap M(Y')$,

(i′) $p \cap L(A')$ est omis dans $M(Y' \cup X')$;

(ii′) X' est τ'-indiscernable au-dessus de A', τ' étant un type d'ordre infini;

(iii′) $|A'| < \kappa_0$.

Supposons choisie, pour tout $a \in M(Y \cup X)$, une formule notée $\psi_a[v_0]$, telle que

$$\psi_a[v_0] \in p, \text{ et } M(Y \cup X) \models \neg\psi_a[\ ].$$

X' est un sous-ensemble quelconque de X, de cardinal ω; et Y' est la réunion d'une chaîne de sous-réalisations de Y, $\{Y_n; n \in \omega\}$ définie par récurrence et telle que: $Y_0 = \varnothing$, $|Y_n| \leqq |L|$ et pour tout $a \in M(Y_n \cup X')$,

$$\psi_a[v_0] \in L(M(Y_{n+1})).$$

Les propriétés requises se vérifient aisément, ce qui achève la démonstration de 5.2.

Tout modèle saturé étant universel (1.1), de la proposition ci-dessus résulte que les hypothèses de 2.7 et 2.8 sont vérifiées en tout cardinal $\geqq |L|$, et donc:

PROPOSITION 5.3. (a) *Si T vérifie* (I), *T est stable en tout cardinal* $\geqq |L|$.

(b) *Pour tous éléments A, $B \in \eta$ et tout cardinal régulier κ, tels que*

$$A \subset B,\ |A| < \kappa \leqq |B|,\ |L| < \kappa,$$

il existe $C \subset B$, κ-indiscernable au-dessus de A dans L.

PROPOSITION 5.4. *T vérifie* (I), *et $\kappa_0 > \lambda_2$, λ_2 étant défini ainsi*:

$$\begin{aligned}\lambda_2 &= |L|,\ \textit{si } |L| > \lambda_0,\ \textit{ou si } |L| = \lambda_0 \textit{ et } |L| \textit{ est régulier},\\ &= |L|^+,\ \textit{sinon}.\end{aligned}$$

Alors tout modèle de T, vérifiant S_{λ_0} et de cardinal $> |L|$, est saturé.

DÉMONSTRATION. Supposant donné un modèle B, vérifiant S_{λ_0} et de cardinal $> |L|$, mais non saturé, nous allons en déduire l'existence d'un modèle non saturé de T, de cardinal κ_0, ce qui contredit 5.1. Supposons donc B, $A \subset B$, $p \in S(A)$ tels que

$|B| > |L|$ et B vérifie S_{λ_0}, $|A| < |B|$,

(i) p est omis dans B.

Alors 5.3 entraîne:

(ii) il existe $X \subset B$, $|L|$-indiscernable au-dessus de A.

Nous pouvons appliquer 4.7, en prenant λ_0 pour cardinal λ, et $T(A)$ pour théorie, au lieu de T.

En effet B, enrichi en réalisation de $L(A)$, satisfait $T(A)$, et

X est $|L|$-indiscernable au-dessus de A

équivaut a

X est $|L|$-indiscernable dans B considèré comme réalisation de $L(A)$.

Enfin $T(A)$ vérifie l'hypothèse requise par 4.7: évidemment, il suffit pour cela que T la vérifie, ce qui résulte de 5.2 et 3.6.

Soit donc $Z \to P_A(Z)$ la correspondance ainsi obtenue entre ensembles ordonnés par $<$ et modèles de $T(A)$.

Si Z_0 est de type κ_0 pour $<$, $P_A(Z_0)$ omet p, car toute partie de Z_0 de cardinal $\leqq \lambda_0$ se plonge dans X, donc $P_A(Z_0)$ se plonge dans B, d'après 4.7. Si

(iii) $|A| < \kappa_0$,

$P_A(Z_0) \restriction L$ est un modèle de T non saturé et de cardinal κ_0. Si (iii) vaut, la démonstration est donc terminée.

Dans l'hypothèse $|A| \geqq \kappa_0$, nous serons ramenés au cas précédent en construisant $B' \subset B$ tel que, A' étant $B' \cap A$, B' vérifie S_{λ_0} et

(i)′ $p \cap L(A')$ est omis dans B',

(ii)′ $X \subset B'$ (et est nécessairement $|L|$-indiscernable au-dessus de A'),

(iii)′ $|A'| \leqq \lambda_2 < \kappa_0$.

B' est la réunion d'une chaîne croissante de sous-réalisations de B, $\{B_\alpha; \alpha < \gamma\}$, construite par récurrence sur α, telle que $|B_\alpha| = |L|\ \forall \alpha < \gamma$, et

$B_0 = X$,

α ordinal limite $\Rightarrow B_\alpha = \bigcup \{B_\beta; \beta < \alpha\}$,

$\alpha = \beta + 1 \Rightarrow B_\alpha$ réalise tout ensemble de formules Σ, tel que Σ est contenu dans un point de $S(B_\beta)$ et $|\Sigma| \leqq \lambda_0$, et $L(B_\alpha)$ contient pour tout $b \in B_\beta$ une formule $\psi_b[v_0] \in p$, telle que $B \models \neg\, \psi_b[b]$.

Si γ est choisi égal à $|L| \cdot \lambda_0$ quand $\lambda_0 < |L|$, et à λ_2 sinon, B' vérifie S_{λ_0}; car si $C \subset B'$ et $|C| < \lambda_0$, il existe $\alpha < \gamma$ tel que $C \subset B_\alpha$, et chaque sous-ensemble d'un point de $S(C)$ de cardinal $< \lambda_0$ est réalisé dans $B_{\alpha+1}$, donc dans B'.

$p \cap L(A')$ est omis dans B', puisque pour tout $b \in B'$, $\psi_b[v_0] \in L(B')$. Enfin $X \subset B_0 \subset B'$, et $|A'| \leqq |B'| = \lambda_2$.

Proposition 5.5. *Soit T vérifiant les hypothèses de la Proposition* 5.4. (*T est catégorique en κ_0; κ_0 est tel que*

$\kappa_0 > |L|$ si $|L|$ est régulier ou si $|L| > \lambda_0$,

$\kappa_0 > |L|^+$ sinon,

$\kappa_0 \neq \lambda_1$,

λ_0 étant le plus petit cardinal tel que $2^{\lambda_0} > |L|$, et λ_1 le plus petit cardinal de cofinalité ω tel que $\lambda_1^\omega > |L|$.)

(a) *T est catégorique en tout $\kappa \geqq \kappa_0$.*

(b) *Il existe $\kappa_1 < \beth_\mu$, tel que T soit catégorique en tout $\kappa \geqq \kappa_1$ (μ étant défini en* 4.1),

(c) *si $\lambda_0 = \omega$ (en particulier si $|L| = \omega$), T est catégorique en tout $\kappa > |L|$.*

Il suffit de montrer que tous les modèles de T de cardinal κ vérifient S_{λ_0}, et d'appliquer 5.4.

(a) Si un modèle de T, de cardinal $\kappa > \kappa_0$, n'était pas λ_0-saturé, par Löwenheim-Skolem on en déduirait un sous-modèle non λ_0-saturé, de cardinal κ_0, contredisant 5.1.

(b) D'après (a), tout modèle de cardinal $\kappa_0 + \beth_\mu$ est λ_0 saturé; appliquer alors la Proposition 4.2.

(c) si $\lambda_0 = \omega$, tout modèle de T vérifie S_{λ_0}, d'après 0.2(iii). Pour les valeurs de $|L|$, κ_0, κ non mentionnées dans le Théorème 5.5, il semble que le problème de Łoś reste ouvert (κ_0 étant supposé $> |L|$). Mais dans le cas où κ_0 est supposé égal à $|L|$, Keisler a démontré le résultat suivant: si $|L|$ est un cardinal régulier et $\omega < |L| < 2^\omega$, et T est catégorique en $|L|$, il existe une théorie T' équivalente à T, dans un langage L' tel que $\omega \leqq |L'| < |L|$, et par conséquent T admet un modèle de cardinal $|L'|$.

De plus T est catégorique en tout cardinal $\kappa > |L'|$. (Ce dernier résultat étant l'application à la théorie T' du Théorème 5.5.)

References

1. G. Kreisel et J. L. Krivine, *Eléments de logique mathématique*, Monographies Soc. Math. France, 3, Dunod, Paris, 1967.

2. M. Morley, *On categoricity in power*, Trans. Amer. Math. Soc. **114** (1965), 514–538.

3. M. Morley, "Omitting classes of elements" in *The theory of models*, Proc. 1963 Internat. Symposium, Berkeley, North-Holland, Amsterdam, 1965, pp. 265–273.

4. M. Morley et R. Vaught, *Homogeneous universal models*, Math. Scand. **11** (1962), 37–57.

5. F. P. Ramsey, *On a problem of formal logic*, Proc. London Math. Soc. (2) **30** (1929), 291–310.

6. F. Rowbottom, *The Łoś conjecture for uncountable theories*, Notices Amer. Math. Soc. **11** (1964), 248.

UNIVERSITY OF PARIS,
PARIS, FRANCE